Anomálne škálovanie prímesových polí v turbulentných prostrediach

Martin Menkyna

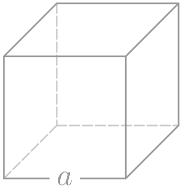
Oddelenie teoretickej fyziky ÚEF SAV, Košice
Laboratórium teoretickej fyziky SÚJV, Dubna

18. júna 2020

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Anomálne škálovanie



$$V(a) = a^3$$

Anomálne škálovanie - odklon od klasického škálovania na základe rozmerovej analýzy (Kolmogorovského, teória stredného poľa, ...).
Anomálne dimenzie γ charakterizujú tento odklon: $V(a) \propto a^{3-\gamma}$.
Kolmogorova teória[1] predpokladá pre tzv. štruktúrne funkcie rýchlostného poľa

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x}, t) - v_r(\boldsymbol{x'}, t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3}, \quad r = \left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'} \right|,$$

ale experiment aj simulácie poukazujú na

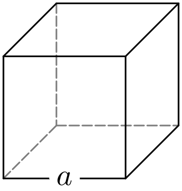
$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x}, t) - v_r(\boldsymbol{x'}, t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3} g_n(r/L)$$

[1] Kolmogorov A.N., Dokl. Akad. Nauk SSSR 30, 301 (1941)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Anomálne škálovanie



$$V(a) = a^3$$

Anomálne škálovanie - odklon od klasického škálovania na základe rozmerovej analýzy (Kolmogorovského, teória stredného poľa, ...).
Anomálne dimenzie γ charakterizujú tento odklon: $V(a) \propto a^{3-\gamma}$.
Kolmogorova teória[1] predpokladá pre tzv. štruktúrne funkcie rýchlostného poľa

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x},t) - v_r(\boldsymbol{x'},t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3}, \quad r = \left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \right|,$$

ale experiment aj simulácie poukazujú na

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x},t) - v_r(\boldsymbol{x'},t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3} g_n(r/L)$$

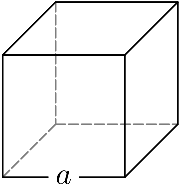
[1] Kolmogorov A.N., Dokl. Akad. Nauk SSSR 30, 301 (1941)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

---

Anomálne škálovanie



$$V(a) \propto a^3 f(a/l)$$

Anomálne škálovanie - odklon od klasického škálovania na základe rozmerovej analýzy (Kolmogorovského, teória stredného poľa, ...).
Anomálne dimenzie γ charakterizujú tento odklon: $V(a) \propto a^{3-\gamma}$.
Kolmogorova teória[1] predpokladá pre tzv. štruktúrne funkcie rýchlostného poľa

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x}, t) - v_r(\boldsymbol{x'}, t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3}, \quad r = \left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'} \right|,$$

ale experiment aj simulácie poukazujú na

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x}, t) - v_r(\boldsymbol{x'}, t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3} g_n(r/L)$$

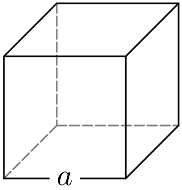
[1] Kolmogorov A.N., Dokl. Akad. Nauk SSSR 30, 301 (1941)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

---

Anomálne škálovanie



$$V(a) \propto a^3 f(a/l)$$

Anomálne škálovanie - odklon od klasického škálovania na základe rozmerovej analýzy (Kolmogorovského, teória stredného poľa, ...).
Anomálne dimenzie γ charakterizujú tento odklon: $V(a) \propto a^{3-\gamma}$.
Kolmogorova teória[1] predpokladá pre tzv. štruktúrne funkcie rýchlostného poľa

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x},t) - v_r(\boldsymbol{x'},t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3}\,, \quad r = \left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'} \right|\,,$$

ale experiment aj simulácie poukazujú na

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x},t) - v_r(\boldsymbol{x'},t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3} g_n(r/L)$$

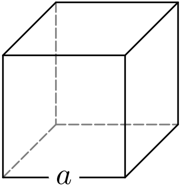
---

[1] Kolmogorov A.N., Dokl. Akad. Nauk SSSR 30, **301** (1941)

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

---

Anomálne škálovanie



$$V(a) \propto a^3 f(a/l)$$

Anomálne škálovanie - odklon od klasického škálovania na základe rozmerovej analýzy (Kolmogorovského, teória stredného poľa, ...).
Anomálne dimenzie γ charakterizujú tento odklon: $V(a) \propto a^{3-\gamma}$.
Kolmogorova teória[1] predpokladá pre tzv. štruktúrne funkcie rýchlostného poľa

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x}, t) - v_r(\boldsymbol{x'}, t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3} , \quad r = \left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'} \right| ,$$

ale experiment aj simulácie poukazujú na

$$\left\langle \left[v_r(\boldsymbol{x}, t) - v_r(\boldsymbol{x'}, t) \right]^n \right\rangle \propto (\bar{\varepsilon} r)^{n/3} \, g_n(r/L)$$

---

[1] Kolmogorov A.N., Dokl. Akad. Nauk SSSR 30, **301** (1941)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v **plne rozvinutej turbulencii**

Plne rozvinutá turbulencia

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

$p \equiv P/\rho$ je preškálovaný tlak, $\nu \equiv \eta/\rho$ predstavuje kinematickú viskozitu.

Bezrozmerný tvar Navierovej-Stokesovej rovnice:

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\nu}{ul}\Delta \boldsymbol{v},$$

kde $\mathrm{Re} = ul/\nu$ je Reynoldsovo číslo.

Plne rozvinutá turbulencia prislúcha oblasti $\mathrm{Re} \to \infty$

Plne rozvinutá turbulencia

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

$p \equiv P/\rho$ je preškálovaný tlak, $\nu \equiv \eta/\rho$ predstavuje kinematickú viskozitu.

Bezrozmerný tvar Navierovej-Stokesovej rovnice:

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\nu}{ul} \Delta \boldsymbol{v},$$

kde $\mathrm{Re} = ul/\nu$ je Reynoldsovo číslo.

Plne rozvinutá turbulencia prislúcha oblasti $\mathrm{Re} \to \infty$

Anomálne škálovanie primesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Plne rozvinutá turbulencia

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

$p \equiv P/\rho$ je preškálovaný tlak, $\nu \equiv \eta/\rho$ predstavuje kinematickú viskozitu.

Bezrozmerný tvar Navierovej-Stokesovej rovnice:

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\nu}{ul} \Delta \boldsymbol{v},$$

kde $\mathrm{Re} = ul/\nu$ je Reynoldsovo číslo.

Plne rozvinutá turbulencia prislúcha oblasti $\mathrm{Re} \to \infty$

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

---

Plne rozvinutá turbulencia

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

$p \equiv P/\rho$ je preškálovaný tlak, $\nu \equiv \eta/\rho$ predstavuje kinematickú viskozitu.

Bezrozmerný tvar Navierovej-Stokesovej rovnice:

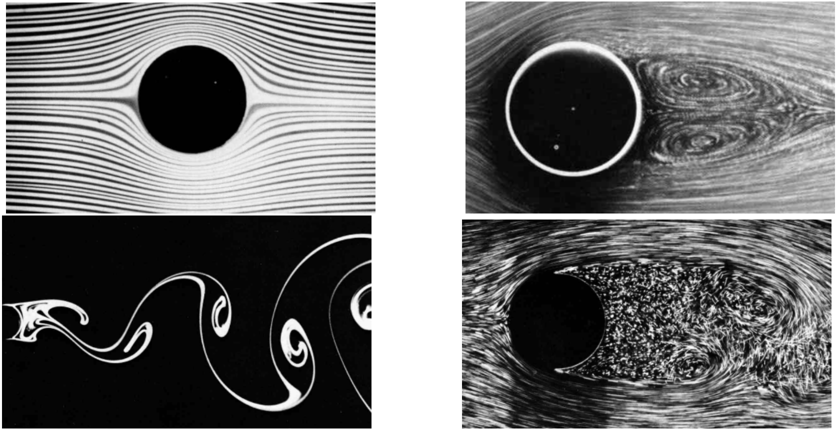
$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\nu}{ul} \Delta \boldsymbol{v},$$

kde $\mathrm{Re} = ul/\nu$ je Reynoldsovo číslo.

Plne rozvinutá turbulencia prislúcha oblasti $\mathrm{Re} \to \infty$

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Plne rozvinutá turbulencia



Obr. 1: Obtekanie[2] valca tekutinami s $\mathrm{Re} \approx 0, 26, 140, 2000$.

[2] Dyke M. V., *An Album of Fluid Motion* (Parabolic Press, Stanford, 1982)

Anomálne škálovanie **primesových polí** v **plne rozvinutej turbulencii**

Advekcia a prímesové polia

Z definície (wiki):

"transport of matter via the movement of a fluid".

šírenie sa fyzikálnej veličiny (skalárnej / vektorovej) prostredníctvom rýchlostných polí

Existujú dva druhy:

- skalárna prímes (teplota, nečistoty, ...)
  - popísaná Kraichnanovým modelom[3]
- vektorová prímes (hlavne magnetické pole)
  - popísaná Kazantsevovým-Kraichnanovým modelom[4]

---

[3] Kraichnan R. H., Phys. Fluids 11, 945 (1968)

[4] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP 26, 1031 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v **plne rozvinutej turbulencii**

Advekcia a prímesové polia

Z definície (wiki):

"transport of matter via the movement of a fluid".

šírenie sa fyzikálnej veličiny (skalárnej / vektorovej) prostredníctvom rýchlostných polí

Existujú dva druhy:

- ▷ skalárna prímes (teplota, nečistoty, ...)
  - popísaná Kraichnanovým modelom[1]
- ▷ vektorová prímes (hlavne magnetické pole)
  - popísaná Kazantsevovým-Kraichnanovým modelom[2]

---

[1] Kraichnan R. H., Phys. Fluids 11, 945 (1968)

[2] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP 26, 1031 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie **prímesových polí** v **plne rozvinutej turbulencii**

Advekcia a prímesové polia

Z definície (wiki):

"transport of matter via the movement of a fluid".

šírenie sa fyzikálnej veličiny (skalárnej / vektorovej) prostredníctvom rýchlostných polí

Existujú dva druhy:

- ▷ skalárna prímes (teplota, nečistoty, . . .)
  popísaná Kraichnanovým modelom[3]
- ▷ vektorová prímes (hlavne magnetické pole)
  popísaná Kazantsevovým-Kraichnanovým modelom[4]

[3] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)
[4] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP 26, 1031 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v **plne rozvinutej turbulencii**

Advekcia a prímesové polia

Z definície (wiki):

"transport of matter via the movement of a fluid".

šírenie sa fyzikálnej veličiny (skalárnej / vektorovej) prostredníctvom rýchlostných polí

Existujú dva druhy:

- ▷ skalárna prímes (teplota, nečistoty, . . .)
  popísaná Kraichnanovým modelom[3]
- ▷ vektorová prímes (hlavne magnetické pole)
  popísaná Kazantsevovým-Kraichnanovým modelom[4]

---

[3] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

[4] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP 26, 1031 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

---

Advekcia a prímesové polia

Z definície (wiki):

"*transport of matter via the movement of a fluid*".

šírenie sa fyzikálnej veličiny (skalárnej / vektorovej) prostredníctvom rýchlostných polí

Existujú dva druhy:

- ▷ skalárna prímes (teplota, nečistoty, ...)
  popísaná Kraichnanovým modelom[3]
- ▷ vektorová prímes (hlavne magnetické pole)
  popísaná Kazantsevovým-Kraichnanovým modelom[4]

[3] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

[4] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1968)

Advekcia a prímesové polia

Z definície (wiki):

"*transport of matter via the movement of a fluid*".

šírenie sa fyzikálnej veličiny (skalárnej / vektorovej) prostredníctvom rýchlostných polí

Existujú dva druhy:

- ▷ skalárna prímes (teplota, nečistoty, . . .)
  popísaná Kraichnanovým modelom[3]
- ▷ vektorová prímes (hlavne magnetické pole)
  popísaná Kazantsevovým-Kraichnanovým modelom[4]

[3] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)
[4] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1968)

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Kraichnanov model[5]

- popisuje advekciu (šírenie sa) skalárnej veličiny $\theta(x)$ prostredníctvom rýchlostného poľa $\boldsymbol{v}(x)$

$$\partial_t \theta + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \theta = \nu_0 \Delta \theta + f,$$

ν_0 predstavuje koeficient molekulárnej difuzivity, $f(x)$ náhodná sila s Gaussovým rozdelením

- v pôvodnom modeli $\boldsymbol{v}(x)$ delta korelované v čase, nestlačiteľné, izotropné a podliehajúce Gaussovmu rozdeleniu
- vplyv stlačitelnosti - popísaný parametrom $0 \leq \alpha \ll 1$
- konečné časové korelácie rýchlostného poľa - ďalší parameter $u_0 \geq 0$

Korelátor rýchlostného poľa $\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \int \mathrm{d}k\, R_{ij}(\boldsymbol{k}) \widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) e^{-\mathrm{i}\omega(t-t') + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$,

$$\widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\varepsilon-\eta}}{(\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})\,(-\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})},$$

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

[5] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v **plne rozvinutej turbulencii**

Kraichnanov model[5]

- popisuje advekciu (šírenie sa) skalárnej veličiny $\theta(x)$ prostredníctvom rýchlostného poľa $\boldsymbol{v}(x)$

$$\partial_t \theta + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\theta = \nu_0 \Delta \theta + f,$$

  ν_0 predstavuje koeficient molekulárnej difuzivity, $f(x)$ náhodná sila s Gaussovým rozdelením

- v pôvodnom modeli $\boldsymbol{v}(x)$ delta korelované v čase, nestlačiteľné, izotropné a podliehajúce Gaussovmu rozdeleniu
- vplyv stlačitelnosti - popísaný parametrom $0 \leq \alpha \ll 1$
- konečné časové korelácie rýchlostného poľa - ďalší parameter $u_0 \geq 0$

Korelátor rýchlostného poľa $\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \int \mathrm{d}k\, R_{ij}(\boldsymbol{k}) \widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) e^{-\mathrm{i}\omega(t-t') + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$,

$$\widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\varepsilon-\eta}}{(\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})(-\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})},$$

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

[5] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Kraichnanov model[5]

- popisuje advekciu (šírenie sa) skalárnej veličiny $\theta(x)$ prostredníctvom rýchlostného poľa $\boldsymbol{v}(x)$

$$\partial_t \theta + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \theta = \nu_0 \Delta \theta + f,$$

  ν_0 predstavuje koeficient molekulárnej difuzivity, $f(x)$ náhodná sila s Gaussovým rozdelením

- v pôvodnom modeli $\boldsymbol{v}(x)$ delta korelované v čase, nestlačiteľné, izotropné a podliehajúce Gaussovmu rozdeleniu
- vplyv stlačitelnosti - popísaný parametrom $0 \leq \alpha \ll 1$
- konečné časové korelácie rýchlostného poľa - ďalší parameter $u_0 \geq 0$

Korelátor rýchlostného poľa $\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \int \mathrm{d}k\, R_{ij}(\boldsymbol{k}) \widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) e^{-\mathrm{i}\omega(t-t') + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$,

$$\widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\varepsilon-\eta}}{(\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})(-\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})},$$

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

[5] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

---

Kraichnanov model[5]

- ▷ popisuje advekciu (šírenie sa) skalárnej veličiny $\theta(x)$ prostredníctvom rýchlostného poľa $\boldsymbol{v}(x)$

$$\partial_t\theta + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\theta = \nu_0\Delta\theta + f,$$

  ν_0 predstavuje koeficient molekulárnej difuzivity, $f(x)$ náhodná sila s Gaussovým rozdelením

- ▷ v pôvodnom modeli $\boldsymbol{v}(x)$ delta korelované v čase, nestlačiteľné, izotropné a podliehajúce Gaussovmu rozdeleniu
- ▷ vplyv stlačitelnosti - popísaný parametrom $0 \leq \alpha \ll 1$
- ▷ konečné časové korelácie rýchlostného poľa - ďalší parameter $u_0 \geq 0$

Korelátor rýchlostného poľa $\langle v_i(x)v_j(x')\rangle = \int \mathrm{d}k\, R_{ij}(\boldsymbol{k})\widetilde{D}_v(\omega,\boldsymbol{k})e^{-\mathrm{i}\omega(t-t')+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$,

$$\widetilde{D}_v(\omega,\boldsymbol{k}) = \frac{g_0\nu_0^3k^{4-d-2\varepsilon-\eta}}{(\mathrm{i}\omega+u_0\nu_0k^{2-\eta})\,(-\mathrm{i}\omega+u_0\nu_0k^{2-\eta})},$$

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2} + \alpha\frac{k_ik_j}{k^2}.$$

[5] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

---

Kraichnanov model[5]

- popisuje advekciu (šírenie sa) skalárnej veličiny $\theta(x)$ prostredníctvom rýchlostného poľa $\boldsymbol{v}(x)$

$$\partial_t \theta + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \theta = \nu_0 \Delta \theta + f,$$

  ν_0 predstavuje koeficient molekulárnej difuzivity, $f(x)$ náhodná sila s Gaussovým rozdelením
- v pôvodnom modeli $\boldsymbol{v}(x)$ delta korelované v čase, nestlačiteľné, izotropné a podliehajúce Gaussovmu rozdeleniu
- vplyv stlačitelnosti - popísaný parametrom $0 \leq \alpha \ll 1$
- konečné časové korelácie rýchlostného poľa - ďalší parameter $u_0 \geq 0$

Korelátor rýchlostného poľa $\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \int \mathrm{d}k\, R_{ij}(\boldsymbol{k}) \widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) e^{-\mathrm{i}\omega(t-t') + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$,

$$\widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\varepsilon-\eta}}{(\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})(-\mathrm{i}\omega + u_0 \nu_0 k^{2-\eta})},$$

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

[5] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

O čo ide?

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Kraichnanov model[5]

- popisuje advekciu (šírenie sa) skalárnej veličiny $\theta(x)$ prostredníctvom rýchlostného poľa $\boldsymbol{v}(x)$

$$\partial_t \theta + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \theta = \nu_0 \Delta \theta + f,$$

  ν_0 predstavuje koeficient molekulárnej difuzivity, $f(x)$ náhodná sila s Gaussovým rozdelením
- v pôvodnom modeli $\boldsymbol{v}(x)$ delta korelované v čase, nestlačiteľné, izotropné a podliehajúce Gaussovmu rozdeleniu
- vplyv stlačitelnosti - popísaný parametrom $0 \leq \alpha \ll 1$
- konečné časové korelácie rýchlostného poľa - ďalší parameter $u_0 \geq 0$

Korelátor rýchlostného poľa $\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \int \mathrm{d}k\, R_{ij}(\boldsymbol{k}) \widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) e^{-\mathrm{i}\omega(t-t') + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$,

$$\widetilde{D}_v(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{g_0 \nu_0^3 k^{4-d-2\varepsilon-\eta}}{(\mathrm{i}\omega + u_0\nu_0 k^{2-\eta})(-\mathrm{i}\omega + u_0\nu_0 k^{2-\eta})},$$

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

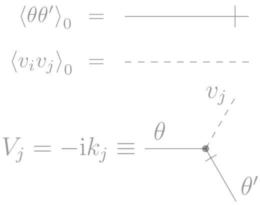
[5] Kraichnan R. H., Phys. Fluids **11**, 945 (1968)

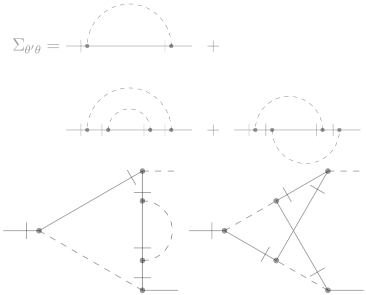
Poľovo-teoretická formulácia

- ▷ existuje potom spôsob ako stochastický problém typu Kraichnanovho modelu prepísať do jazyka "kvantovej" teória poľa pomocou účinku

$$\mathcal{S}_{\mathrm{R}}[\Phi] = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\widetilde{D}_v^{-1}\boldsymbol{v} - \theta' \left[\partial_t - Z_1\nu\Delta + Z_2\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\right]\theta$$

- ▷ propagátory, vrchol a Feynmanove diagramy (výsledky na úrovni dvoch slučiek)



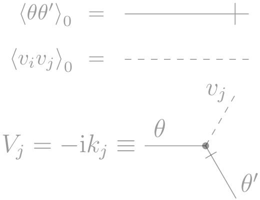


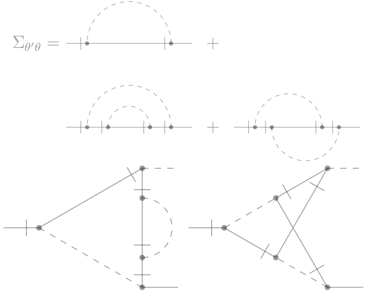
Poľovo-teoretická formulácia

- existuje potom spôsob ako stochastický problém typu Kraichnanovho modelu prepísať do jazyka "kvantovej" teória poľa pomocou účinku

$$\mathcal{S}_{\mathrm{R}}[\Phi] = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\widetilde{D}_v^{-1}\boldsymbol{v} - \theta' \left[\partial_t - Z_1 \nu \Delta + Z_2 \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\right]\theta$$

- propagátory, vrchol a Feynmanove diagramy (výsledky na úrovni dvoch slučiek)



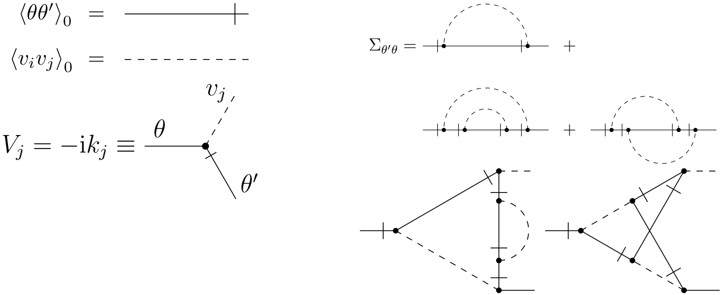


Poľovo-teoretická formulácia

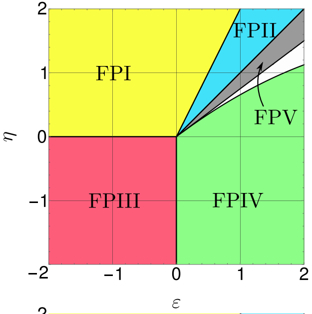
- existuje potom spôsob ako stochastický problém typu Kraichnanovho modelu prepísať do jazyka "kvantovej" teória poľa pomocou účinku

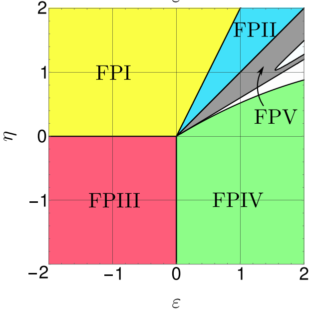
$$\mathcal{S}_{\mathrm{R}}[\Phi] = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\widetilde{D}_v^{-1}\boldsymbol{v} - \theta'\left[\partial_t - Z_1\nu\Delta + Z_2\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\right]\theta$$

- propagátory, vrchol a Feynmanove diagramy (výsledky na úrovni dvoch slučiek)



Výsledky ($\alpha = 0.5$ a $\alpha = 0.8$)

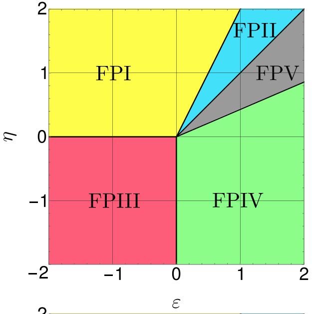


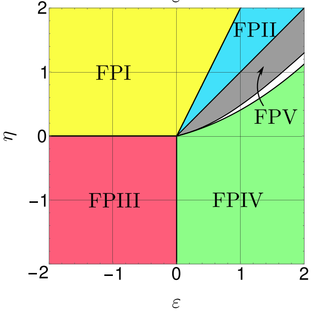


- model má dva rozvojové parametre:
  - ε – odklon od Kolmogorovského škálovania energie $E(k) \propto k^{1-2\varepsilon}$
  - η – odklon od Kolmogorovského škálovania frekvencie $\omega(k) \propto k^{2-\eta}$
- $\alpha = 0 \rightsquigarrow$ žiadne zmeny oproti predošlým výsledkom, keďže hranice stabilít FPII, FPIV a FPV ležia na polpriamke $\eta = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$
- $\alpha \ll \alpha_c \rightsquigarrow$ hranica stability FPIV má parabolický charakter a vzniká oblasť nestability
- $\alpha < \alpha_c \rightsquigarrow$ ďalej sa tento charakter zosilňuje a navyše ďalšie obmedzenia sa prejavujú vo forme hyperbolickej oblasti nestability (získaná "numerickými" výpočtami)
- hrot tejto druhej oblasti sa so zvyšujúcim sa α posúva bližšie k počiatku

Antonov N. V., Phy. Rev. E **60**, 6691 (1999);
Antonov N. V., Phys. D: Nonlin. Phen. **144**, 370 (2000).

Výsledky ($\alpha = 8/7$ a $\alpha = 1.5$)





- ▷ $\alpha = \alpha_c \rightsquigarrow$ dvojslučkové korekcie pre hranicu FPIV sú nulové a obsah oblasti nestability má maximum
- ▷ hrot oblasti nestability sa dostal k počiatku súr. sústavy a ďalej už obmedzuje stabilitu FPV iba vo forme paraboly, ktorá sa pohybuje k $\eta = \varepsilon$ rýchlejšie ako podmienky na FPIV
- ▷ úplný súhlas na úrovni jednej slučky s predošlými prácami (dobré prvotné overenie správnosti výsledkov)
  - výsledky pre FPI - FPIII sú exaktné
  - "gaps or overlaps can appear in the two-loop approximation" sa ukázalo ako pravdivé

Antonov N. V., Phy. Rev. E **60**, 6691 (1999);
Antonov N. V., Phys. D: Nonlin. Phen. **144**, 370 (2000).

Zoznam publikácií a iné

- E. Jurčišinová, M. Jurčišin, M. Menkyna, *Simultaneous influence of helicity and compressibility on anomalous scaling of the magnetic field in the Kazantsev-Kraichnan model*, Phys. Rev. E **95**, 053210 (2017)
- E. Jurčišinová, M. Jurčišin, M. Menkyna, *Anomalous scaling in the Kazantsev-Kraichnan model with finite-time correlations: Two-loop renormalization group analysis of relevant composite operators*, Euro. Phys. Jour. B **91**, 313 (2018)
- E. Jurčišinová, M. Jurčišin, M. Menkyna, *Influence of Finite-Time Velocity Correlations on Scaling Properties of the Magnetic Field in the Kazantsev-Kraichnan Model: Two-Loop Renormalization Group Analysis*. Theor. Math. Phys. **200**, 1126–1138 (2019)
- M. Menkyna, *Finite Time Correlations and Compressibility Effects in the Three-Dimensional Kraichnan Model*, EPJ Web of Conferences **226**, 02016 (2020)
- M. Menkyna, *Influence of compressibility on scaling regimes of Kraichnan model with finite time correlations: two-loop RG analysis.* Eur. Phys. J. B **93**, 71 (2020)

Popularizácia: organizovanie rôznych súťaží pod záštitou organizácie STROM (PF UPJŠ), ako napríklad Lomihlav / (Fyzikálny) Náboj a iné.

Povinný slide

Ďakujem za pozornosť!

Kazantsev-Kraichnanov model[6]

- model magneto-hydrodynamickej plne rozvinutej turbulencie
- magnetické pole $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)$ uvažujeme ako pasívnu vektorovú prímes, popísanú pomocou

$$\partial_t \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{b} = \nu_0 \Delta \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f},$$

- $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ je náhodné, stlačiteľné ($\nabla\cdot\boldsymbol{v}\neq 0$) vektorové rýchlostné pole, ktoré spĺňa Gaussovskú štatistiku ($\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\rangle = 0$) s párovou korelačnou funkciou

$$\langle v_i(x) v_j(x')\rangle = \delta(t-t') D_0 \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \frac{R_{ij}(\boldsymbol{k})}{k^{d+\varepsilon}} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')},$$

- $R_{ij}(\boldsymbol{k})$ predstavuje projektor definovaný ako

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijs}\rho \frac{k_s}{|\boldsymbol{k}|},$$

  kde $0 \le |\rho| \le 1$ určuje mieru narušenia priestorovej parity v systéme. $|\rho| = 1$ zodpovedá úplnému narušeniu priestorovej symetrie, zatiaľ čo $|\rho| = 0$ prislúcha kompletne symetrickému prípadu (v štatistickom zmysle)

[6] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1968)

Kazantsev-Kraichnanov model[6]

- model magneto-hydrodynamickej plne rozvinutej turbulencie
- magnetické pole $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$ uvažujeme ako pasívnu vektorovú prímes, popísanú pomocou

$$\partial_t \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{b} = \nu_0 \Delta \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f},$$

- $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ je náhodné, stlačiteľné ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$) vektorové rýchlostné pole, ktoré spĺňa Gaussovskú štatistiku ($\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \rangle = 0$) s párovou korelačnou funkciou

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \delta(t - t') D_0 \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \frac{R_{ij}(\boldsymbol{k})}{k^{d+\varepsilon}} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')},$$

- $R_{ij}(\boldsymbol{k})$ predstavuje projektor definovaný ako

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijs} \rho \frac{k_s}{|\boldsymbol{k}|},$$

  kde $0 \leq |\rho| \leq 1$ určuje mieru narušenia priestorovej parity v systéme. $|\rho| = 1$ zodpovedá úplnému narušeniu priestorovej symetrie, zatiaľ čo $|\rho| = 0$ prislúcha kompletne symetrickému prípadu (v štatistickom zmysle)

[6] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1968)

Anomálne škálovanie prímesových polí v plne rozvinutej turbulencii

Kazantsev-Kraichnanov model[6]

- model magneto-hydrodynamickej plne rozvinutej turbulencie
- magnetické pole $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$ uvažujeme ako pasívnu vektorovú prímes, popísanú pomocou

$$\partial_t \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{b} = \nu_0 \Delta \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f},$$

- $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ je náhodné, stlačiteľné ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$) vektorové rýchlostné pole, ktoré spĺňa Gaussovskú štatistiku ($\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \rangle = 0$) s párovou korelačnou funkciou

$$\left\langle v_i(x) v_j(x') \right\rangle = \delta(t - t') D_0 \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \frac{R_{ij}(\boldsymbol{k})}{k^{d+\varepsilon}} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'})},$$

- $R_{ij}(\boldsymbol{k})$ predstavuje projektor definovaný ako

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijs} \rho \frac{k_s}{|\boldsymbol{k}|},$$

  kde $0 \leq |\rho| \leq 1$ určuje mieru narušenia priestorovej parity v systéme. $|\rho| = 1$ zodpovedá úplnému narušeniu priestorovej symetrie, zatiaľ čo $|\rho| = 0$ prislúcha kompletne symetrickému prípadu (v štatistickom zmysle)

[6] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1968)

Kazantsev-Kraichnanov model[6]

- model magneto-hydrodynamickej plne rozvinutej turbulencie
- magnetické pole $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$ uvažujeme ako pasívnu vektorovú prímes, popísanú pomocou

$$\partial_t \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{b} = \nu_0 \Delta \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f},$$

- $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ je náhodné, stlačiteľné ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$) vektorové rýchlostné pole, ktoré spĺňa Gaussovskú štatistiku ($\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \rangle = 0$) s párovou korelačnou funkciou

$$\left\langle v_i(x) v_j(x') \right\rangle = \delta(t - t') D_0 \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \frac{R_{ij}(\boldsymbol{k})}{k^{d+\varepsilon}} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'})},$$

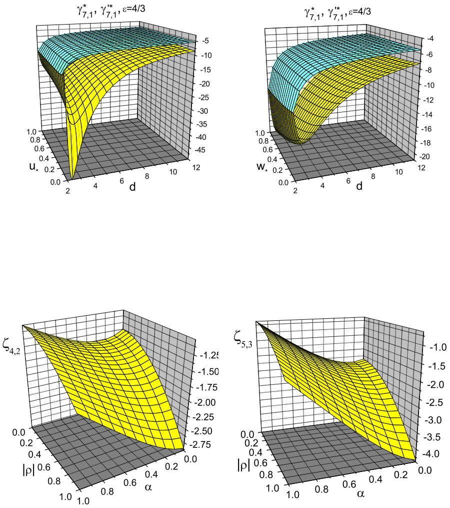
- $R_{ij}(\boldsymbol{k})$ predstavuje projektor definovaný ako

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} + \alpha \frac{k_i k_j}{k^2} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijs} \rho \frac{k_s}{|\boldsymbol{k}|},$$

kde $0 \leq |\rho| \leq 1$ určuje mieru narušenia priestorovej parity v systéme. $|\rho| = 1$ zodpovedá úplnému narušeniu priestorovej symetrie, zatiaľ čo $|\rho| = 0$ prislúcha kompletne symetrickému prípadu (v štatistickom zmysle)

[6] Kazantsev A. P., Sov. Phys. JETP **26**, 1031 (1968)

Anomálne škálovanie $B_{N-m,m}(r)$



- ▷ škálovacie vlastnosti korelačných funkcií $B_{N-m,m}$ sa stávajú viac anomálne pod vplyvom helicity
- ▷ v rozumnom súlade s najnovšími experimentálnymi výsledkami[7]
- ▷ správanie sa $\zeta_{2,1}$ ako funkcie α pre fixované $|\rho|$
- ▷ jedinečný charakter $\zeta_{3,1}$ ako funkcie $\alpha \ll 1$ pre $|\rho| \approx 1$
- ▷ klesajúce tendencie $\zeta_{4,2}$ a $\zeta_{5,3}$ pre dostatočne malé α a $|\rho|$
- ▷ pre dostatočne veľké hodnoty α sa škálovacie exponenty stávajú rastúcimi funkciami α bez ohľadu na veľkosť $|\rho|$

[7] Schaffner D. A., *et al*, Phys. Rev. Lett. **112**, 165001 (2014)

Záver

- šálovacie vlastnosti $B_{N,m}(r)$ v rámci Kazantsevovho-Kraichnanovho modelu s narušením priestorovej parity a stlačitelnosti boli skúmané pomocou poľovo-teoretickej RG a operátorového rozvoja do druhého rádu poruchovej teórie
- IČ asymptotické správanie je závislé od α ale nezávislé od ρ
- prítomnosť helicity môže výrazne zmenšiť škálovacie exponenty korelačných funkcií magnetického poľa
- preskúmaný bol takisto aj vplyv stlačitelnosti, ale tá vykazuje zložitejšie správanie sa
    - pre korelačné funkcie nižších rádov sú škálovacie exponenty klesajúce funkcie stlačitelnosti, aspoň pre oblast $\alpha \ll 1$ a $|\rho| \ll 1$
    - avšak pre vyššie rády sú univerzálne rastúcimi funkciami α bez ohľadu na hodnotu parametra ρ